

0.1 Based Point

一般にはホモトピー群において基点が違ふとき、 $\pi_n(X, x_0)$ と $\pi_n(X, x_1)$ は同型ではなかつた。しかし、 X が弧状連結のときこれは同型になるため、基点を無視して $\pi_n(X)$ と書くときも多かつた。そんな忘れ去られている基点について色々と考えてみる。

Definition 0.1.1

基点付き空間 (W, w_0) において、 w_0 が非退化な基点とは、空間対として (W, w_0) が NDR 対であるときのことを言う。

NDR 対とは closed cofibration と同値なので HEP を思い出してほしい。

Definition 0.1.2

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0) \quad , \quad \alpha : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$$

が与えられ $\alpha(1) = x_1$ とおく。このとき、 $\alpha : \{w_0\} \times I \longrightarrow X$ と同一視する。

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} & \xrightarrow{\quad} & W \\
 \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow f \\
 & X & \\
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I
 \end{array}$$

の可換図式から HEP を用いて、

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} & \xrightarrow{\quad} & W \\
 \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow f \\
 & X & \\
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I
 \end{array}$$

が存在するので、 $f^\alpha = \tilde{f}_1 : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ とおく。基点を抜きにして、明らかに $f^\alpha \simeq f$ である。

Lemma 0.1.3

上記の構成による f^α は HEP における \tilde{f} のとり方によらず、homotopic を除いて一意に定まる。

proof) 非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0) \quad , \quad \alpha : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$$

が与えられ $\alpha(1) = x_1$ とおく。

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} & \xrightarrow{\quad} & W \\
 \downarrow & & \swarrow f \\
 & & X \\
 & \nearrow \alpha & \nwarrow g, h \\
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \\
 & & \downarrow
 \end{array}$$

の図式で $g, h : W \times I \longrightarrow X$ の二つの写像が可換にするとする。このとき、 $g_1 \simeq f_1 : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ を示せばよいが、 $g_1 \simeq g_0 = f$, $h_1 \simeq h_0 = f$ なので基点自由ではこの二つは homotopic である。つまり、

$$H : W \times I \longrightarrow X$$

を $H(w, s) = \begin{cases} g(w, 1 - 2s) & s \leq 1/2 \\ h(w, 2s - 1) & 1/2 \leq s \end{cases}$ と定義すれば、 H は g_1 と h_1 を繋ぐ基点自由なホモトピーである。ところで、

$$\beta : I \times I \longrightarrow X$$

を、 $\beta(s, t) = \begin{cases} \alpha(1 - 2s(1 - t)) & s \leq 1/2 \\ \alpha(w, 1 - 2(1 - s)(1 - t)) & 1/2 \leq s \end{cases}$ と定義する。これにより、

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \\
 \downarrow & & \swarrow H \\
 & & X \\
 & \nearrow \beta & \nwarrow \tilde{H} \\
 \{w_0\} \times I \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \times I \\
 & & \downarrow
 \end{array}$$

を可換にする $\tilde{H} : W \times I \times I \rightarrow X$ が存在する。ここで、 β の性質は $\beta(0, t) = \beta(1, t) = \beta(s, 1) = \alpha(1) = x_1$ ということなので、

$$g_1 = H_0 = \tilde{H}_{0,0} \simeq \tilde{H}_{0,1} \simeq \tilde{H}_{1,1} \simeq \tilde{H}_{1,0} = h_1$$

はすべて基点を止めて homotopic である。

この証明のポイントはもちろん β の構成である。これは $\tilde{H}_{0,0}$ からスタートしてすぐに $\tilde{H}_{1,0}$ に行くのではなく基点を保ったままぐるりと $I \times I$ の周囲を回ってくるという手法である。

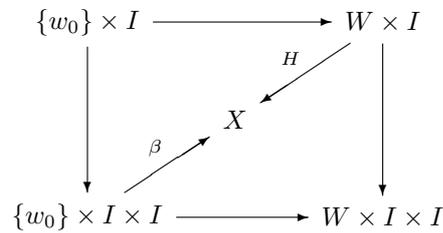
Lemma 0.1.4

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 $f, g : (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ が $f \simeq g$ ならば、 $f^\alpha \simeq g^\alpha : (W, w_0) \rightarrow (X, x_1)$ である。

proof) $H : (W \times I, w_0 \times I) \rightarrow (X, x_0)$ を f と g のホモトピーとする。このとき、

$$\beta : I \times I \rightarrow I$$

を、 $\beta(s, t) = \alpha(t)$ とおく。



の図式は可換であり、HEP が用いれる状況にあるので、

$$\tilde{H} : W \times I \times I \rightarrow X$$

が存在し、 $\tilde{H}_1 : (W \times I, w_0 \times I) \rightarrow (X, x_1)$ が f^α と g^α のホモトピーとなるのは $t = 0, 1$ のときでの図式を考えればわかる。

Definition 0.1.5

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 $\alpha : (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ で、 $\alpha(1) = x_1$ とおくと、

$$\alpha_{\#} : [(W, w_0), (X, x_0)] \rightarrow [(W, w_0), (X, x_1)]$$

が、 $\alpha_{\#}[f] = [f^{\alpha}]$ で定義できる。

Lemma 0.1.6

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$\alpha, \beta : (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$$

が $\alpha \simeq \beta \text{ rel } \partial I$ ならば、 $\alpha_{\#} = \beta_{\#}$ である。

proof) $H : I \times I \rightarrow X$ を α と β を繋ぐホモトピーとする。 $H(t, 0) = x_0, H(s, 1) = x_1$ である。 $f : (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ に対し、 $f' : W \times I \rightarrow X$ を $f'(w, s) = f(w)$ で定義する。

$$\begin{array}{ccc} \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \\ \downarrow & \nearrow f' & \downarrow \\ \{w_0\} \times I \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \times I \\ & \nearrow H & \end{array}$$

は可換で HEP を用いれば、 $\tilde{f}' : W \times I \times I \rightarrow X$ が導かれ、

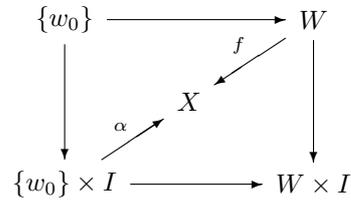
$$F = \tilde{f}'_1 : (W \times I, w_0 \times I) \rightarrow (X, x_1)$$

とおけば、これにより $f^{\alpha} \simeq f^{\beta} : (W, w_0) \rightarrow (X, x_1)$ であるため、 $\alpha_{\#}[f] = \beta_{\#}[f]$

Lemma 0.1.7

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 $\alpha : I \rightarrow X$ が x_0 への定値写像ならば、 $\alpha_{\#}$ は恒等射である。

proof) $f : (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ に対し、

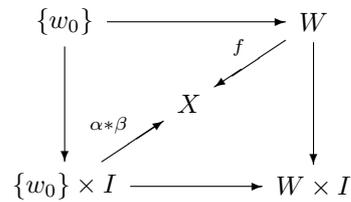


から誘導される $\tilde{f} : W \times I \rightarrow X$ を考える。 $f' : W \times I \rightarrow X$ を $f'(w, t) = f(w)$ で定義すればこれもうえの図式を可換にするため、よって、 $f^\alpha = \tilde{f}_1 \simeq f'_1 = f$ なので、つまり、 $\alpha[f] = [f^\alpha] = [f]$ で恒等射となる。

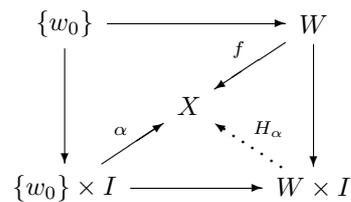
Lemma 0.1.8

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ は $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1, \beta(0) = x_1, \beta(1) = x_2$ とする。このとき、 $\alpha * \beta : I \rightarrow X$ が定義されるが、このとき、 $(\alpha * \beta)_\# = \beta_\# \circ \alpha_\#$

proof) $f : (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ に対し、



の図式で HEP を用いると誘導される $\tilde{f} : W \times I \rightarrow X$ は、



が誘導される。このとき、 $f^\alpha = H_{\alpha_1}$ である。また、

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} & \xrightarrow{\quad} & W \\
 \downarrow & \nearrow f^\alpha & \downarrow \\
 & X & \\
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \\
 & \nwarrow \beta & \nearrow H_\beta \\
 & &
 \end{array}$$

において、 $(f^\alpha)^\beta = H_{\beta_1}$ である。

$$H_\alpha * H_\beta : W \times I \longrightarrow X$$

を考えれば、

$$f^{\alpha * \beta} = \tilde{f}_1 \simeq H_\alpha * H_{\beta_1} = H_{\beta_1} = (f^\alpha)^\beta$$

であり、 $(\alpha * \beta)_\# [f] = \beta_\# \circ \alpha_\# [f]$ である。

Corollary 0.1.9

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 X 弧状連結な空間とすると、任意の2点 $x_0, x_1 \in X$ に対し、

$$[(W, w_0), (X, x_0)] \cong [(W, w_0), (X, x_1)]$$

proof) $f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、 X が弧状連結だから、 $\alpha : I \longrightarrow X$ で $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ となるものが存在する。

$$\alpha_\# : [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_1)]$$

が定義されるが、 α の逆道 $\alpha^{-1} : I \longrightarrow X$ が存在し、

$$\alpha_\#^{-1} : [(W, w_0), (X, x_1)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_0)]$$

であり、合成すると逆道の性質から、

$$\alpha_\# \circ \alpha_\#^{-1} = (\alpha^{-1} * \alpha)_\# = *_\# = 1$$

で逆も同じだから全単射である。

Definition 0.1.10

$[(I; 0, 1), (X, x_0, x_1)] = \pi(x_0, x_1)$ とかく。このとき、非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$\pi(x_0, x_1) \times [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_1)]$$

が $([\alpha], [f]) \mapsto [f^\alpha]$ により定義される。特に $x_0 = x_1$ のとき、 $\pi(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ であり、

$$\pi_1(X, x_0) \times [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_0)]$$

は上の Lemma により作用となる。

Theorem 0.1.11

非退化な基点付き空間 (W, w_0) と弧状連結な空間 X において、

$$\varphi : [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [W, X]$$

を基点を忘れる写像とする。このとき、 φ は全射である。また、 $\pi_1(X, x_0)$ の作用が自明である事と、 φ が単射である事は同値である。

proof) $f : W \longrightarrow X$ に対し X が弧状連結なので、 $\alpha : I \longrightarrow X$ で、 $\alpha(0) = f(w_0), \alpha(1) = x_0$ となるものが存在する。このとき、 $f^\alpha : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、基点を忘れれば f と homotopic であったから、 $\varphi[f^\alpha] = [f]$ となり全射である。

次に作用が自明として単射を示す。 $[f], [g] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ に対し、 $\varphi[f] = \varphi[g]$ とする。つまり、 f, g は基点自由で homotopic である。このとき、そのホモトピーを、

$$H : W \times I \longrightarrow X$$

とする。 $\alpha = H|_{\{w_0\} \times I} : \{w_0\} \times I \longrightarrow X$ とおき、 $\beta : \{w_0\} \times I \times I \longrightarrow X$ を $\beta(w_0, s, t) = \alpha(w_0, s + t - st)$ とおく。このとき、

$$\begin{array}{ccc}
 \{w_0\} \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \\
 \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\
 & X & \\
 \downarrow & \nearrow \beta & \downarrow \\
 \{w_0\} \times I \times I & \xrightarrow{\quad} & W \times I \times I
 \end{array}$$

の図式において HEP を使うと、

$$\tilde{H} : W \times I \times I \longrightarrow X$$

が存在するが、 $\tilde{H}_1 : (W \times I, \{w_0\} \times I) \longrightarrow (X, x_0)$ を考えれば、 $s = 0, 1$ を代入すればこれが、 f^α と g を繋ぐホモトピーと考えられる。よって、作用が自明ならば $f^\alpha \simeq f$ が基点を止めて homotopic である。よって $f \simeq f^\alpha \simeq g$ が基点を止めて homotopic となる。

逆に φ が単射とする。 $[f] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ と、 $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対し、基点を忘れれば、 $f^\alpha \simeq f$ であったので、 $\varphi[f^\alpha] = \varphi[f]$ である。 φ が単射であるため、 $[f^\alpha] = [f] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ なので作用は自明である。

Remark 0.1.12

X が単連結ならば、 $\pi_1(X, x_0) = 0$ なので作用は自明にしかない。

Definition 0.1.13

$W = S^n$ において任意の基点は非退化である。位相空間 X において、

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

の作用が自明のとき、 X は n 単純と呼ぶ。また任意の n に対し、 n 単純であるような空間を単に単純と呼ぶ。

上の remark からすぐにわかるように X が単連結ならば、単純である。逆に単純であって単連結でない空間の例は次のような事がある。

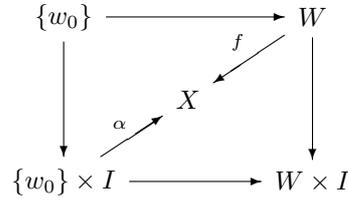
Example 0.1.14

X を弧状連結な H -space とする。このとき、非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、 $\pi_1(X, x_0)$ は $[(W, w_0), (X, x_0)]$ に自明に作用する。

proof) $f \in [(W, w_0), (X, x_0)]$, $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対し、 $m : X \times X \longrightarrow X$ を H -association とする。 $H : W \times I \longrightarrow X$ を $H(w, t) = m(f(w), \alpha(t))$ で定義する。

$$H(w, 0) = H(w, 1) = m(f(w), x_0) = f(w)$$

であり、 $H(w_0, t) = m(f(w_0), \alpha(t)) = m(x_0, \alpha(t)) = \alpha(t)$ なので、 $\alpha = H|_{\{w_0\} \times I}$ と考えられる。

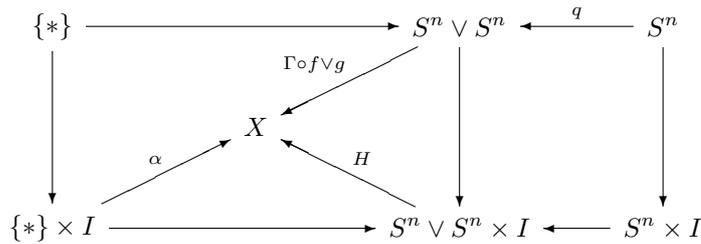


の図式で H はこれを可換するため、 $f^\alpha \simeq H_1 = f$ である。つまり、 $[f^\alpha] = [f] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ であり作用が自明となる。

Theorem 0.1.15

$n \geq 1$ に対し、 $\pi_1(X, x_0)$ は $\pi_n(X, x_0)$ は群の自己同型として作用する。

proof) 一般に $f \in [(W, *), (X, x_0)]$, $g \in [(W', *'), (X, x_0)]$ と $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対し、 $\Gamma \circ f \vee g : (W \vee W', w_0) \rightarrow (X, x_0)$ を考えると、 $(\Gamma \circ f \vee g)^\alpha \simeq \Gamma \circ f^\alpha \vee g^\alpha$ である。ただし、 Γ は折りたたむ写像である。これより、



の図式で H は HEP により誘導された写像で $H_1 = (\Gamma \circ f \vee g)^\alpha$ となり、 q は pinch の写像である。 $[f] + [g] = [\Gamma \circ f \vee g \circ q]$ であるので、

$$([f] + [g])^\alpha = [\Gamma \circ f \vee g \circ q]^\alpha = [H_1 \circ q] = [\Gamma \circ f^\alpha \vee g^\alpha \circ q] = [f^\alpha] + [g^\alpha]$$

であるため、

$$\alpha_\# : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

は準同型である。 $\alpha^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$ が存在するので、 $\alpha_\#$ は自己同型である。

Remmark 0.1.16

特に $n = 1$ のときは、 $\pi_1(X, x_0)$ は $\pi_1(X, x_0)$ の内部自己同型として作用する。

Theorem 0.1.17

X が 1 単純であることと、 $\pi_1(X, x_0)$ がアーベル群となることは同値である。

proof) $\pi_1(X, x_0)$ の作用が自明という事は内部自己同型群が自明である。つまり $\pi_1(X, x_0)$ はアーベル群ということである。

Theorem 0.1.18

X が n 単純であることと、基点を忘れる写像

$$\varphi : \pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)] \longrightarrow [S^n, X]$$

は全単射であることは同値である。