0.1 Based Point

一般にはホモトピー群において基点が違うとき、$\pi_n(X, x_0)$ と $\pi_n(X, x_1)$ は同型ではなかった。しかし、X が弧状連結のときこれは同型になるため、基点を無視して $\pi_n(X)$ と書くときも多かった。そんな忘れ去られている基点について色々と考えてみる。

Definition 0.1.1

基点付き空間 (W, w_0) において、w_0 が非退化な基点とは、空間対として (W, w_0) が NDR 対であるときのことを言う。

NDR 対とは closed cofibration と同値なので HEP を思い出してほしい。

Definition 0.1.2

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0) \quad , \quad \alpha : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$$

が与えられ $\alpha(1) = x_1$ とおく。このとき、$\alpha : \{w_0\} \times I \longrightarrow X$ と同一視する。

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W \times I
\end{tikzcd}$$

の可換図式から HEP を用いて、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W \times I \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

が存在するので、$f^\alpha = \tilde{f}_1 : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ とおく。基点を抜きにして、明からに $f^\alpha \simeq f$ である。

Lemma 0.1.3

上記の構成による f^{α} は HEP における $\tilde{f}$ のとり方によらず、homotopic を除いて一意に定まる。

proof)　非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0) \quad , \quad \alpha : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$$

が与えられ $\alpha(1) = x_1$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W \times I \arrow[ul, "{g,h}"']
\end{tikzcd}$$

の図式で $g, h : W \times I \longrightarrow X$ の二つの写像が可換にするとする。このとき、$g_1 \simeq f_1 : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ を示せばよいが、$g_1 \simeq g_0 = f$, $h_1 \simeq h_0 = f$ なので基点自由ではこの二つは homotopic である。つまり、

$$H : W \times I \longrightarrow X$$

を $H(w, s) = \begin{cases} g(w, 1-2s) & s \leqq 1/2 \\ h(w, 2s-1) & 1/2 \leqq s \end{cases}$ と定義すれば、H は g_1 と h_1 を繋ぐ基点自由なホモトピーである。ところで、

$$\beta : I \times I \longrightarrow X$$

を、$\beta(s, t) = \begin{cases} \alpha(1 - 2s(1-t)) & s \leqq 1/2 \\ \alpha(w, 1 - 2(1-s)(1-t)) & 1/2 \leqq s \end{cases}$ と定義する。これにより、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \times I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & W \times I \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\widetilde{H} : W \times I \times I \longrightarrow X$ が存在する。ここで、β の性質は $\beta(0,t) = \beta(1,t) = \beta(s,1) = \alpha(1) = x_1$ ということなので、

$$g_1 = H_0 = \widetilde{H}_{0,0} \simeq \widetilde{H}_{0,1} \simeq \widetilde{H}_{1,1} \simeq \widetilde{H}_{1,0} = h_1$$

はすべて基点を止めて homotopic である。

□

この証明のポイントはもちろん β の構成である。これは $\widetilde{H}_{0,0}$ からスタートしてすぐに $\widetilde{H_{1,0}}$ に行くのでなく基点を保ったままぐるりと $I \times I$ の周囲を回ってくるという手法である。

Lemma 0.1.4

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、$f, g : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0)$ が $f \simeq g$ ならば、$f^\alpha \simeq g^\alpha : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ である。

proof)　$H : (W \times I, w_0 \times I) \longrightarrow (X, x_0)$ を f と g のホモトピーとする。このとき、

$$\beta : I \times I \longrightarrow I$$

を、$\beta(s,t) = \alpha(t)$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \times I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & W \times I \times I
\end{tikzcd}$$

の図式は可換であり、HEP が用いれる状況にあるので、

$$\tilde{H} : W \times I \times I \longrightarrow X$$

が存在し、$\tilde{H}_1 : (W \times I, w_0 \times I) \longrightarrow (X, x_1)$ が f^α と g^α のホモトピーとなるのは $t = 0, 1$ のときでの図式を考えればわかる。

□

Definition 0.1.5

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、$\alpha : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$ で、$\alpha(1) = x_1$ とおくと、

$$\alpha_\sharp : [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_1)]$$

が、$\alpha_\sharp[f] = [f^\alpha]$ で定義できる。

Lemma 0.1.6

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、

$$\alpha, \beta : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$$

が $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I ならば、$\alpha_\sharp = \beta_\sharp$ である。

proof) $H : I \times I \longrightarrow X$ を α と β を繋ぐホモトピーとする。$H(t, 0) = x_0, H(s, 1) = x_1$ である。$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、$f' : W \times I \longrightarrow X$ を $f'(w, s) = f(w)$ で定義する。

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \times I \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \times I \arrow[ur, "H"] \arrow[rr] & & W \times I \times I
\end{tikzcd}$$

は可換で HEP を用いれば、$\tilde{f}' : W \times I \times I \longrightarrow X$ が導かれ、

$$F = \tilde{f}'_1 : (W \times I, w_0 \times I) \longrightarrow (X, x_1)$$

とおけば、これにより $f^\alpha \simeq g^\alpha : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_1)$ であるため、$\alpha_\sharp[f] = \beta_\sharp[f]$

$\square$

Lemma 0.1.7

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、$\alpha : I \longrightarrow X$ が x_0 への定値写像ならば、$\alpha_\sharp$ は恒等射である。

proof) $f:(W,w_0)\longrightarrow (X,x_0)$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\}\times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W\times I
\end{tikzcd}$$

から誘導される $\tilde{f}:W\times I\longrightarrow X$ を考える。$f':W\times I\longrightarrow X$ を $f'(w,t)=f(w)$ で定義すればこれもうえの図式を可換にするため、よって、$f^{\alpha}=\tilde{f}_1\simeq f'_1=f$ なので、つまり、$\alpha[f]=[f^{\alpha}]=[f]$ で恒等射となる。

$\square$

Lemma 0.1.8

非退化な基点付き空間 (W,w_0) において、$\alpha,\beta:I\longrightarrow X$ は $\alpha(0)=x_0,\alpha(1)=x_1,\beta(0)=x_1,\beta(1)=x_2$ とする。このとき、$\alpha*\beta:I\longrightarrow X$ が定義されるが、このとき、$(\alpha*\beta)_\sharp=\beta_\sharp\circ\alpha_\sharp$

proof) $f:(W,w_0)\longrightarrow (X,x_0)$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\}\times I \arrow[ur, "\alpha*\beta"] \arrow[rr] & & W\times I
\end{tikzcd}$$

の図式で HEP を用いると誘導される $\tilde{f}:W\times I\longrightarrow X$ は、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\}\times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W\times I \arrow[ul, dotted, "H_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

が誘導される。このとき、$f^\alpha = H_{\alpha 1}$ である。また、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f^\alpha"'] \arrow[dd] \\
 & X & \\
\{w_0\} \times I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & W \times I \arrow[ul, dotted, "H_\beta"']
\end{tikzcd}$$

において、$(f^\alpha)^\beta = H_{\beta_1}$ である。

$$H_\alpha * H_\beta : W \times I \longrightarrow X$$

を考えれば、

$$f^{\alpha * \beta} = \tilde{f}_1 \simeq H_\alpha * H_{\beta_1} = H_{\beta_1} = (f^\alpha)^\beta$$

であり、$(\alpha * \beta)_\sharp [f] = \beta_\sharp \circ \alpha_\sharp [f]$ である。

$\square$

Corollary 0.1.9

非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、X 弧状連結な空間とすると、任意の２点 $x_0, x_1 \in X$ に対し、

$$[(W, w_0), (X, x_0)] \cong [(W, w_0), (X, x_1)]$$

proof)　　$f : (W, w_0) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、X が弧状連結だから、$\alpha : I \longrightarrow X$ で $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ となるものが存在する。

$$\alpha_\sharp : [(W, w_0), (X, x_0)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_1)]$$

が定義されるが、α の逆道 $\alpha^{-1} : I \longrightarrow X$ が存在し、

$$\alpha_\sharp^{-1} : [(W, w_0), (X, x_1)] \longrightarrow [(W, w_0), (X, x_0)]$$

であり、合成すると逆道の性質から、

$$\alpha_\sharp \circ \alpha_\sharp^{-1} = (\alpha^{-1} * \alpha)_\sharp = *_\sharp = 1$$

で逆も同じだから全単射である。

$\square$

Definition 0.1.10

$[(I;0,1),(X,x_0,x_1)] = \pi(x_0,x_1)$ とかく。このとき、非退化な基点付き空間 (W,w_0) において、

$$\pi(x_0,x_1) \times [(W,w_0),(X,x_0)] \longrightarrow [(W,w_0),(X,x_1)]$$

が $([\alpha],[f]) \mapsto [f^\alpha]$ により定義される。特に $x_0 = x_1$ のとき、$\pi(x_0,x_0) = \pi_1(X,x_0)$ であり、

$$\pi_1(X,x_0) \times [(W,w_0),(X,x_0)] \longrightarrow [(W,w_0),(X,x_0)]$$

は上の Lemma により作用となる。

Theorem 0.1.11

非退化な基点付き空間 (W,w_0) と弧状連結な空間 X において、

$$\varphi : [(W,w_0),(X,x_0)] \longrightarrow [W,X]$$

を基点を忘れる写像とする。このとき、φ は全射である。また、$\pi_1(X,x_0)$ の作用が自明である事と、φ が単射でである事は同値である。

proof) $f : W \longrightarrow X$ に対し X が弧状連結なので、$\alpha : I \longrightarrow X$ で、$\alpha(0) = f(w_0), \alpha(1) = x_0$ となるものが存在する。このとき、$f^\alpha : (W,w_0) \longrightarrow (X,x_0)$ に対し、基点を忘れれば f と homotopic であったから、$\varphi[f^\alpha] = [f]$ となり全射である。

次に作用が自明として単射を示す。$[f],[g] \in [(W,w_0),(X,x_0)]$ に対し,$\varphi[f] = \varphi[g]$ とする。つまり、f,g は基点自由で homotopic である。このとき、そのホモトピーを、

$$H : W \times I \longrightarrow X$$

とする。$\alpha = H_{|_{\{w_0\}\times I}} : \{w_0\} \times I \longrightarrow X$ とおき、$\beta : \{w_0\} \times I \times I \longrightarrow X$ を $\beta(w_0,s,t) = \alpha(w_0, s+t-st)$ とおく。このとき、

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\} \times I \times I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & W \times I \times I
\end{tikzcd}$$

の図式において HEP を使うと、

$$\widetilde{H} : W \times I \times I \longrightarrow X$$

が存在するが、$\widetilde{H}_1 : (W \times I, \{w_0\} \times I) \longrightarrow (X, x_0)$ を考えれば、$s = 0, 1$ を代入すればこれが、f^α と g を繋ぐホモトピーと考えらられる。よって、作用が自明ならば $f^\alpha \simeq f$ が基点を止めて homotopic である。よって $f \simeq f^\alpha \simeq g$ が基点を止めて homotopic となる。

逆に φ が単射とする。$[f] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ と、$\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対し、基点を忘れれば、$f^\alpha \simeq f$ であったので、$\varphi[f^\alpha] = \varphi[f]$ である。φ が単射であるため、$[f^\alpha] = [f] \in [(W, w_0), (X, x_0)]$ なので作用は自明である。

□

Remmark 0.1.12

X が単連結ならば、$\pi_1(X, x_0) = 0$ なので作用は自明にしかならない。

Definition 0.1.13

$W = S^n$ において任意の基点は非退化である。位相空間 X において、

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

の作用が自明のとき、X は n 単純と呼ぶ。また任意の n に対し、n 単純であるような空間を単に単純と呼ぶ。

上の remmark からすぐにわかるように X が単連結ならば、単純である。逆に単純であって単連結でない空間の例は次のような事がある。

Example 0.1.14

X を弧状連結な H-space とする。このとき、非退化な基点付き空間 (W, w_0) において、$\pi_1(X, x_0)$ は $[(W, w_0), (X, x_0)]$ に自明に作用する。

proof)　　$f \in [(W, w_0), (X, x_0)]$, $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対し、$m : X \times X \longrightarrow X$ を H-association とする。$H : W \times I \longrightarrow X$ を $H(w, t) = m(f(w), \alpha(t))$ で定義する。

$$H(w, 0) = H(w, 1) = m(f(w), x_0) = f(w)$$

であり、$H(w_0,t)=m(f(w_0),\alpha(t))=m(x_0,\alpha(t))=\alpha(t)$ なので、$\alpha=H_{|_{\{w_0\}\times I}}$ と考えられる。

$$\begin{tikzcd}
\{w_0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
\{w_0\}\times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & W\times I
\end{tikzcd}$$

の図式で H はこれを可換するため、$f^\alpha\simeq H_1=f$ である。つまり、$[f^\alpha]=[f]\in[(W,w_0),(X,x_0)]$ であり作用が自明となる。

$\square$

Theorem 0.1.15

$n\geqq 1$ に対し、$\pi_1(X,x_0)$ は $\pi_n(X,x_0)$ は群の自己同型として作用する。

proof)　一般に $f\in[(W,*),(X,x_0)]$, $g\in[(W',*'),(X,x_0)]$ と $\alpha\in\pi_1(X,x_0)$ に対し、$\Gamma\circ f\vee g:(W\vee W',w_0)\longrightarrow(X,x_0)$ を考えると、$(\Gamma\circ f\vee g)^\alpha\simeq\Gamma\circ f^\alpha\vee g^\alpha$ である。ただし、Γ は折りたたむ写像である。これより、

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & S^n\vee S^n \arrow[dl, "\Gamma\circ f\vee g"'] \arrow[dd] & S^n \arrow[l, "q"'] \arrow[dd] \\
& X & & \\
\{*\}\times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & S^n\vee S^n\times I \arrow[ul, "H"'] & S^n\times I \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

の図式で H は HEP により誘導された写像で $H_1=(\Gamma\circ f\vee g)^\alpha$ となり、q は pintch の写像である。$[f]+[g]=[\Gamma\circ f\vee g\circ q]$ であるので、

$$([f]+[g])^\alpha=[\Gamma\circ f\vee g\circ q]^\alpha=[H_1\circ q]=[\Gamma\circ f^\alpha\vee g^\alpha\circ q]=[f^\alpha]+[g^\alpha]$$

であるため、

$$\alpha_\sharp:\pi_n(X,x_0)\longrightarrow\pi_n(X,x_0)$$

は準同型である。$\alpha^{-1}\in\pi_1(X,x_0)$ が存在するので、$\alpha_\sharp$ は自己同型である。

$\square$

Remmark 0.1.16

特に $n=1$ のときは、$\pi_1(X,x_0)$ は $\pi_1(X,x_0)$ の内部自己同型として作用する。

Theorem 0.1.17

X が 1 単純であることと、$\pi_1(X,x_0)$ がアーベル群となることは同値である。

proof) $\pi_1(X,x_0)$ の作用が自明という事は内部自己同型群が自明である。つまり $\pi_1(X,x_0)$ はアーベル群ということである。

□

Theorem 0.1.18

X が n 単純であることと、基点を忘れる写像

$$\varphi : \pi_n(X,x_0) = [(S^n,*),(X,x_0)] \longrightarrow [S^n, X]$$

は全単射であることは同値である。